第27卷 南京大学学报 Vol. 27
1991年10月 Journal of Nanjing University Oct. 1991

论围长不小于给定数的图的最多边数*

孙智宏
(淮阴师专)

摘 要

设 $e_g(p)$ 为围长不小于 g 的 p 阶图最多边数,本文给出了 $e_5(p)$、$e_7(p)$ 的较好上界,证明了当 $g=2r+1\geqslant 5$ 时,$e_g(p)<p+\frac{r}{r+1}p^{1+\frac{1}{r}}$.

关键词: 围长, 度数, 最多边数, 距离.

全文使用如下的记号约定:

G——简单图, d(v)——顶点的度数, C_n——n 个顶点的圈, d(u,v)——顶点 u 和 v 间的距离, $|V(G)|=p$,$|E(G)|=e(G)=e$,$\triangle(G)=\triangle$,$\delta(G)=\delta$ 分别为图 G 的顶点个数(阶数)、边数、最大度数和最小度数,$\Gamma_k(x)$——与顶点 x 距离为 k 的点集,$d_k(x)=|\Gamma_k(x)|$,$\beta_k=\frac{1}{2}\sum\limits_{x\in V(G)}d_k(x)$表示图 G 中距离为 k 的点对个数,$N_k$ 表示图中距离大于 k 的点对个数,[x] 表示不超过 x 的最大整数.

§1 基本引理

引理 1 设 G 为简单图,围长 $g(G)=g\geqslant 5$,则

$$\beta_k+\beta_{k-1}=\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}d(v)\cdot d_{k-1}(v),\quad \left(k=2,\cdots,\left[\frac{g-1}{2}\right]\right)$$

证 取定顶点 x,考虑与 x 距离不超过 k 的点集的诱导子图.注意到 $k\leqslant(g-1)/2$, 此诱导子图不能有圈,因而为树.于是有

$$|\Gamma_k(x)|=\sum_{v\in\Gamma_{k-1}(x)}(d(v)-1)=\sum_{v\in\Gamma_{k-1}(x)}d(v)-|\Gamma_{k-1}(x)|$$

即 $d_k(x)+d_{k-1}(x)=\sum\limits_{v\in\Gamma_{k-1}(x)}d(v)$, 让 x 跑遍 G 的顶点,累加得

$$\sum_{x\in V(G)}d_k(x)+\sum_{x\in V(G)}d_{k-1}(x)=\sum_{x\in V(G)}\sum_{v\in\Gamma_{k-1}(x)}d(v)=\sum_{v\in V(G)}d(v)\cdot|\Gamma_{k-1}(v)|$$

由此,$\beta_k+\beta_{k-1}=\frac{1}{2}(\sum\limits_{x\in V(G)}d_k(x)+\sum\limits_{x\in V(G)}d_{k-1}(x))=\frac{1}{2}\sum\limits_{v\in V(G)}d(v)d_{k-1}(v)$. 证毕.

* 收稿日期: 1991-07-12

推论1 设图G围长$g(G)\geqslant 5$，则G中距离大于2的点对个数为

$$N_2=\binom{p}{2}-\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}d^2(v)$$

引理 2 设 G 为简单图，围长 g(G) = g ≥ 7，则

$$\beta_k+2\beta_{k-1}+\beta_{k-2}=\sum_{d(u,v)=k-2}d(u)d(v)\left(k=3,\ \cdots,\ \left[\frac{g-1}{2}\right]\right)$$

证 由引理1知

$$2(\beta_k+\beta_{k-1})=\sum_{v\in V(G)}d(v)d_{k-1}(v)=\sum_{v\in V(G)}d(v)\cdot\sum_{u\in\Gamma_{k-2}(v)}(d(u)-1)$$

$$=\sum_{v\in V(G)}\sum_{u\in\Gamma_{k-2}(v)}d(u)d(v)-\sum_{v\in V(G)}d(v)d_{k-2}(v)$$

$$=2\sum_{d(u,v)=k-2}d(u)d(v)-2(\beta_{k-1}+\beta_{k-2})$$

故$\beta_k+2\beta_{k-1}+\beta_{k-2}=\sum\limits_{d(u,v)=k-2}d(u)d(v)$,引理得证.

推论 2 若图 G 围长 g(G) ≥ 7，则 G 中距离大于 3 的点对个数为:

$$N_3=\frac{p(p-1)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}d^2(v)-\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}d(v)-\sum_{uv\in E(G)}d(u)d(v)$$

证 由引理 1 知 $\beta_2=\frac{1}{2}\sum\limits_{v\in V(G)}d^2(v)-\beta_1\ \ \frac{1}{2}\sum\limits_{v\in V(G)}d^2(v)-\frac{1}{2}\sum\limits_{v\in V(G)}d(v)$，故据引理 2 得

$$N_3=\binom{p}{2}-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)=\binom{p}{2}+\beta_2-(\beta_1+2\beta_2+\beta_3)$$

$$=\frac{p(p-1)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}d^2(v)-\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}d(v)-\sum_{uv\in E(G)}d(u)d(v)$$ 证完.

值得指出，容易验明推论1和推论2的逆命题也是正确的.

利用引理1可以建立如下基本结果.

命题1 设G为简单图，围长$g(G)=g\geqslant 5$，$r=\left[\frac{g-1}{2}\right]$，$\delta=\delta(G)\geqslant 1$，则

(Ⅰ)当$2\leqslant k\leqslant r$时，$\beta_k\geqslant(\delta-1)\beta_{k-1}$;

(Ⅱ)当$2\leqslant k\leqslant r$时，$\beta_k\geqslant(\delta-1)^{k-1}e$;

(Ⅲ)$e\leqslant\dfrac{\binom{p}{2}}{[1+(\delta-1)+\cdots+(\delta-1)^{r-1}]}$;

(Ⅳ)$\delta[1+(\delta-1)+\cdots+(\delta-1)^{r-1}]\leqslant p-1$.

证 (Ⅰ)由引理1知

$$\beta_k\geqslant\frac{\delta}{2}\sum_{v\in V(G)}d_{k-1}(v)-\beta_{k-1}=\frac{\delta}{2}\cdot 2\beta_{k-1}-\beta_{k-1}=(\delta-1)\beta_{k-1};$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)得

$$\beta_k\geqslant(\delta-1)\beta_{k-1}\geqslant(\delta-1)^2\beta_{k-2}\geqslant\cdots\geqslant(\delta-1)^{k-1}\beta_1=(\delta-1)^{k-1}e;$$

(Ⅲ)由于$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r \leqslant \binom{p}{2}$，故由(Ⅱ)得

$$[1+(\delta-1)+\cdots+(\delta-1)^{r-1}]e \leqslant \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r \leqslant \binom{p}{2}$$

即$e \leqslant \binom{p}{2} / [1+(\delta-1)+\cdots+(\delta-1)^{r-1}]$.

(Ⅳ)注意到$2e=\sum_{v\in V(G)} d(v) \geqslant p\delta$，由(Ⅲ)即得.

综上，命题得证.

§2 $e_5(p)$与$e_7(p)$的上界

记$e_g(p)$为围长不小于 g 的 p 阶图最多边数，由[1]知$e_g(p)$也是围长为 g 的 p 阶图最多边数，$e_g(p)$还等于适合任意 g−1 点诱导子图至多 g−2 条边的 p 阶图最多边数. 在这节里，我们给出$e_5(p)$和$e_7(p)$的上界估计.

定理1 $e_5(p) \leqslant \frac{1}{2} p\sqrt{p-1}$

证　设 G 是围长不小于 5 的 p 阶图，由推论 1 知$\binom{p}{2}-\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d^2(v) \geqslant 0$，而据Cauchy 不等式，有$\sum_{v\in V(G)} d^2(v) \geqslant \frac{1}{p}(\sum_{v\in V(G)} d(v))^2=\frac{(2e)^2}{p}$，故$\binom{p}{2} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d^2(v) \geqslant \frac{1}{2} \times \frac{4e^2}{p}$，由此$e \leqslant \frac{1}{2} p\sqrt{p-1}$，于是定理得证.

下面我们不加证明地给出$e_5(p)$的前15个数值:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$e_5(p)$	0	1	2	3	5	6	8	10	12	15	16	18	21	23	26

记 $Z(n;2)$ 为不含 C_4 的两部分都是 n 个顶点的二部图之最多边数，Reiman 在 [3] 中证明：当 n 充分大时，$Z(n;2) > n^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{4}{3}}$. 因为二部图不含奇圈，故当 p 充分大时有

$$e_5(p) \geqslant e_5(2[\frac{p}{2}]) \geqslant Z([\frac{p}{2}];2) > [\frac{p}{2}]^{\frac{3}{2}} - [\frac{p}{2}]^{\frac{4}{3}}$$

这表明定理 1 已给出了 $e_5(p)$ 最好的阶，但要确定极限 $\lim_{p\to\infty}\frac{e_5(p)}{p\sqrt{p}}$ 的存在性和极限值似乎是很困难的事.

下面我们讨论$e_7(p)$的上界.

引理3 设G为简单图，$\delta=\delta(G)$，则 $\sum_{uv\in E(G)} d(u)d(v) \geqslant \delta \sum_{v\in V(G)} d^2(v) - \frac{\delta^2}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v)$.

证 因为

$$2\sum_{uv\in E(G)}(d(u)-\delta)(d(v)-\delta)=\sum_{v\in V(G)}\sum_{u\in\Gamma_1(v)}(d(u)-\delta)(d(v)-\delta)$$

$$=\sum_{v\in V(G)}\sum_{u\in\Gamma_1(v)}d(u)d(v)-\delta\sum_{v\in V(G)}\sum_{u\in\Gamma_1(v)}d(u)-\delta\sum_{v\in V(G)}\sum_{u\in\Gamma_1(v)}d(v)+\delta^2\sum_{v\in V(G)}\sum_{u\in\Gamma_1(v)}1$$

$$=2\sum_{uv\in E(G)}d(u)d(v)-2\delta\sum_{x\in V(G)}d^2(x)+\delta^2\sum_{v\in V(G)}d(v)\geqslant 0$$

故 $\sum\limits_{uv\in E(G)}d(u)d(v)\geqslant\delta\sum\limits_{v\in V(G)}d^2(v)-\frac{\delta^2}{2}\sum\limits_{v\in V(G)}d(v)$ 引理得证。

定理 2 设 G 是围长不小于 7 的 p 阶简单图，$e(G)=e$，$\delta(G)=\delta\geqslant 1$，则

$$e\leqslant\frac{p}{4}\left\{\frac{\delta^2-1}{2\delta-1}+\frac{1}{2\delta-1}\sqrt{(\delta^2-1)^2+4(2\delta-1)(p-1)}\right\}$$

证 由于 $N_3\geqslant 0$，故由推论 2 和引理 3 得

$$\frac{p(p-1)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}d^2(v)-\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}d(v)\geqslant\sum_{uv\in E(G)}d(u)d(v)\geqslant\delta\sum_{v\in V(G)}d^2(v)-\frac{\delta^2}{2}\sum_{v\in V(G)}d(v)$$

即 $p(p-1)\geqslant(2\delta-1)\sum\limits_{v\in V(G)}d^2(v)-(\delta^2-1)\sum\limits_{v\in V(G)}d(v)$，因 $\sum\limits_{v\in V(G)}d(v)=2e$，$\sum\limits_{v\in V(G)}d^2(v)\geqslant\frac{1}{p}(\sum\limits_{v\in V(G)}d(v))^2=\frac{4e^2}{p}$，故 $p(p-1)\geqslant\frac{4(2\delta-1)e^2}{p}-(\delta^2-1)\cdot 2e$，即 $\frac{2\delta-1}{p}(2e)^2-(\delta^2-1)\cdot 2e-p(p-1)\leqslant 0$，由此解得 $2e\leqslant\frac{\delta^2-1+\sqrt{(\delta^2-1)^2+4(2\delta-1)(p-1)}}{2\cdot(2\delta-1)}p$，亦即 $e\leqslant\frac{p}{4}\left\{\frac{\delta^2-1}{2\delta-1}+\frac{1}{2\delta-1}\sqrt{(\delta^2-1)^2+4(2\delta-1)(p-1)}\right\}$ 定理证完。

推论 3 设 G 是围长不小于 7 的 p 阶图，$\delta(G)=\delta=p^{\frac{1}{3}}+o(p^{\frac{1}{3}})$，则

$$e(G)=\frac{1}{2}p^{\frac{4}{3}}+o(p^{\frac{4}{3}})$$

证 因 $\delta\sim p^{\frac{1}{3}}$，故定理2不等式右边为

$$\frac{p}{4}\left\{\frac{\delta^2-1}{2\delta-1}+\frac{1}{2\delta-1}\sqrt{(\delta^2-1)^2+4(2\delta-1)(p-1)}\right\}$$

$$=\frac{p}{4}\left\{\frac{\delta^2-1}{2\delta-1}+\sqrt{\left(\frac{\delta^2-1}{2\delta-1}\right)^2+\frac{4(p-1)}{2\delta-1}}\right\}$$

$$\sim\frac{p}{4}\left\{\frac{1}{2}p^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{4}p^{\frac{2}{3}}+2p^{\frac{2}{3}}}\right\}\sim\frac{1}{2}p^{\frac{4}{3}}\quad(p\to\infty)$$

又 $e(G)=\sum\limits_{v\in V(G)}d(v)\geqslant\frac{p\delta}{2}\sim\frac{1}{2}p^{\frac{4}{3}}$，故 $e(G)=\frac{1}{2}p^{\frac{4}{3}}+o(p^{\frac{4}{3}})$.

注 由命题1(IV)，$\delta^3-\delta^2+\delta\leqslant p-1$，故 $\delta\sim p^{\frac{1}{3}}$ 为极限情形.

引理4 设 G 为简单图，$\delta=\delta(G)\geqslant 1$，则

$$\frac{1}{\frac{\triangle}{\delta}+\frac{\delta}{\triangle}}\sum_{v\in V(G)}d^3(v)\leqslant\sum_{uv\in E(G)}d(u)d(v)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}d^3(v)$$

证 设 G 诸顶点度数为 d_1、d_2、…、d_p，与度为 d_i 的顶点相邻的顶点度为 d_{i1}、d_{i2}、…、d_{id_i} $(1\leqslant i\leqslant p)$. 易见

$$2\sum_{uv\in E(G)}d(u)d(v)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{d_i}d_id_{ij} \tag{1}$$

根据 Cauchy 不等式，我们有

$$(2\sum_{uv\in E(G)}d(u)d(v))^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{d_i}d_i^2\right)(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{d_i}d_{ij}^2)=(\sum_{i=1}^{p}d_i^3)(\sum_{x\in V(G)}d(x)d^2(x))=(\sum_{i=1}^{p}d_i^3)^2$$

即 $\sum_{uv\in E(G)}d(u)d(v)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}d_i^3$.

设 $0<m_1\leqslant a_k\leqslant M_1$，$0<m_2\leqslant b_k\leqslant M_2(k=1,2,\cdots,n)$，Pólya 与 Szego[2] 证明了如下 Cauchy 不等式的逆转：

$$(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)(\sum_{k=1}^{n}b_k^2)\leqslant\frac{1}{4}(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}}+\sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}})^2(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)^2$$

今以此估计(1)式，注意到 $M_1=M_2=\triangle$，$m_1=m_2=\delta$，$\sum a_k^2$ 和 $\sum b_k^2$ 为 $\sum_{i=1}^{p}d_i^3$，便有

$$2\sum_{uv\in E(G)}d(u)d(v)\geqslant\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{p}d_i^3\right)^2\Big/\frac{1}{4}\left(\frac{\triangle}{\delta}+\frac{\delta}{\triangle}\right)^2}=\frac{2}{\triangle/\delta+\delta/\triangle}\sum_{i=1}^{p}d_i^3$$

于是引理得证。

引理5(ЛЯПУНОВ不等式[2])设 a_1、a_2、…、a_n 为非负实数，$0<r<s<t$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^s<\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{t-s}{t-r}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^t\right)^{\frac{s-r}{t-r}}$$

现在能够证明：

定理3 设 G 是围长不小于 7 的 p 阶简单图，$e(G)=e$，$\triangle(G)=\triangle$，$\delta(G)=\delta\geqslant 1$，则平均度数 $x=\frac{2e}{p}$ 适合不等式 $2mx^3-x^2+x-(p-1)\leqslant 0$，这里 $m=1/(\frac{\triangle}{\delta}+\frac{\delta}{\triangle})$.

证 设G诸顶点度数为d_1、d_2、…、d_p，由推论2和引理4知

$$\frac{p(p-1)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}d_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}d_i\geqslant\sum_{uv\in E(G)}d(u)d(v)\geqslant m\sum_{i=1}^{p}d_i^3$$

今在引理5中，令$n=p$，$a_k=d_k(k=1,2,\cdots,p)$，$r=1$，$s=2$，$t=3$，则得

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}d_k^2\leqslant\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}d_k\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}d_k^3\right)^{\frac{1}{2}}$$

即$\left(\sum\limits_{k=1}^{p} d_k^2\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{p} d_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{p} d_k^3\right)$. 据此

$$p(p-1)+\sum_{i=1}^{p} d_i^2-\sum_{i=1}^{p} d_i \geqslant 2m\sum_{i=1}^{p} d_i^3 \geqslant 2m\left(\sum_{k=1}^{p} d_k^2\right)^2 \Big/ \sum_{k=1}^{p} d_k$$

注意到$\sum\limits_{k=1}^{p} d_k = 2e$，即有$\frac{m}{e}\left(\sum\limits_{k=1}^{p} d_k^2\right)^2-\left(\sum\limits_{k=1}^{p} d_k^2\right)+2e-p(p-1)\leqslant 0$由此解得

$$\sum_{k=1}^{p} d_k^2 \leqslant 1+\sqrt{1-\frac{4m}{e}(2e-p(p-1))} \Big/ 2\times\frac{m}{e}$$

而由 Cauchy 不等式知$\sum\limits_{k=1}^{p} d_k^2 \geqslant \frac{(2e)^2}{p}$，故$\frac{2m}{e}\times\frac{4e^2}{p}\leqslant 1+\sqrt{1-8m+\frac{4mp(p-1)}{e}}$，

即，$\left(\frac{8me}{p}-1\right)^2 \leqslant 1-8m+\frac{4mp(p-1)}{e}$，亦即 $8m\left(\frac{8me^2}{p^2}-\frac{2e}{p}+1-\frac{p(p-1)}{2e}\right)\leqslant 0$.

令$x=\frac{2e}{p}$，则有 $2mx^2-x+1-\frac{p-1}{x}\leqslant 0$ 即 $2mx^3-x^2+x-(p-1)\leqslant 0$, 定理证完 .

推论 4 设 G 为围长不小于 7 的 p 阶图，$e(G)=e$，$\triangle(G)=\triangle$，$\delta(G)=\delta\geqslant 1$，则

$$e<\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{\triangle}{\delta}+\frac{\delta}{\triangle}\right)}$$

证 由引理3知

$$\sum_{uv\in E(G)} d(u)d(v)\geqslant \delta\sum_{v\in V(G)} d^2(v)-\frac{\delta}{2}^2\sum_{v\in V(G)} d(v)=\frac{\delta}{2}\sum_{v\in V(G)}(d^2(v)-\delta d(v))+\frac{\delta}{2}\sum_{v\in V(G)} d^2(v)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)}(d^2(v)-\delta d(v))+\frac{\delta}{2}\sum_{v\in V(G)} d^2(v)=\frac{\delta+1}{2}\sum_{v\in V(G)} d^2(v)-\frac{\delta}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v)$$

故由推论2得

$$p(p-1)+\sum_{v\in V(G)} d^2(v)-\sum_{v\in V(G)} d(v)\geqslant 2\sum_{uv\in E(G)} d(u)d(v)\geqslant(\delta+1)\sum_{v\in V(G)} d^2(v)-\delta\sum_{v\in V(G)} d(v)$$

即$p(p-1)\geqslant\delta\sum\limits_{v\in V(G)} d^2(v)-(\delta-1)\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)$注意到$\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2e$，$\sum\limits_{v\in V(G)} d^2(v)\geqslant\frac{4e^2}{p}$，便

有$p(p-1)\geqslant\frac{4\delta}{p}e^2-2(\delta-1)e$,即$\frac{2\delta}{p}e^2-(\delta-1)e-\frac{p(p-1)}{2}\leqslant 0$.由此解得

$$e\leqslant\frac{1}{2\times\frac{2\delta}{p}}\left\{\delta-1+\sqrt{(\delta-1)^2+4\times\frac{2\delta}{p}\times\frac{p(p-1)}{2}}\right\}$$

$$=\frac{p}{4}\left\{1-\frac{1}{\delta}+\sqrt{1+\frac{1}{\delta^2}+\frac{4p-6}{\delta}}\right\}<\frac{p}{4}\left\{1+\sqrt{\frac{4p}{\delta}}\right\}=\frac{p}{2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{p}{\delta}}\right)$$

从而$\left(\frac{2e}{p}-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{p}{\delta}$ 令$x=\frac{2e}{p}$，则由定理 3 得$2mx^3\leqslant(x-\frac{1}{2})^2+p-\frac{5}{4}<p+\frac{p}{\delta}$, 故 x

$<$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\frac{\triangle}{\delta}+\frac{\delta}{\triangle})(p+\frac{p}{\delta})}$，从而 $e=\frac{px}{2}<\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{\triangle}{\delta}+\frac{\delta}{\triangle}\right)}$，推论得证.

推论 4 给出了 $e_7(p)$ 的绝对界限，应该说这个上界较为理想. 因为已知 $e_7(p)=O(p^{\frac{4}{3}})$，而 Benson[4] 曾利用射影空间 $PG(4,q)$ 上的二次曲面构作过围长为 8 的正则图. 这个构造显明，当 p 充分大时 $e_7(p)\geqslant e_8(p)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{4}{3}}-o(p^{\frac{4}{3}})$，故从主阶看，$e_7(p)=O(p^{\frac{4}{3}})$ 是最好的. 推论 4 则在图接近正则时给出理想结果.

§3 $e_{2r+1}(p)$的上界估计

本节将证明下面的主要定理.

定理 4 设 $g=2r+1\geqslant 5$，$e_g(p)$ 为围长不小于 g 的 p 阶图最多边数，则

$$e_g(p)<p+\frac{r}{r+1}p^{1+\frac{1}{r}}$$

从主阶看，至少对 $g=5$，7，这定理的界限是严格的. 与 $e_g(p)$ 相关联，Erdos 曾不加证明地宣布：$ex(p;C_{2r})=O(p^{1+\frac{1}{r}})$，这里 $ex(p;C_{2r})$ 为不含 C_{2r} 的 p 阶图最多边数.

Bondy 与 Simonovits 在 [5] 中终于证明了 Erdos 的断言，他们得到

$$ex(p;C_{2r})<100rp^{1+\frac{1}{r}}$$

由此我们可导出 $e_g(p)\leqslant ex(p;C_{2r})<100rp^{1+\frac{1}{r}}$，这个上界太大，而且 [5] 中证明很复杂. 我们的定理 4 则大大改进了这一界限，而这完全是基于一很简单的想法.

引理 6 设 G 是围长不小于 g 的 p 阶图，$e(G)=e_g(p)$，δ 为 G 的最小度数，则

$$\delta\geqslant e_g(p)-e_g(p-1)$$

证 设顶点 v 的度数为 δ，考虑 G 的删点子图 $G-\{v\}$. 显然 $G-\{v\}$ 有 $p-1$ 个顶点、$e_g(p)-\delta$ 条边，并且 $G-\{v\}$ 的围长不小于 g，故 $e_g(p)-\delta\leqslant e_g(p-1)$ 即 $\delta\geqslant e_g(p)-e_g(p-1)$

推论 5 $e_g(p)\leqslant\frac{p}{p-2}e_g(p-1)$

证 由引理 6 知 $\delta\geqslant e_g(p)-e_g(p-1)$，而显然 $p\delta\leqslant\sum_{x\in V(G)}d(x)=2e_g(p)$ 故 $e_g(p)-e_g(p-1)\leqslant\delta\leqslant\frac{2e_g(p)}{p}$，即 $e_g(p)\leqslant\frac{p}{p-2}e_g(p-1)$ 引理得证.

推论5可用来估算p较小时$e_g(p)$的数值.

定理的证明 设 G 是围长不小于 g 的 p 阶图，$e(G)=e_g(p)$，$\delta(G)=\delta$. 我们断言：当 $p\geqslant 2$ 时，$\delta\leqslant 1+\sqrt[r]{p-1}$.

当 $\delta=1$，2 时，断言显然成立．

当 $\delta>2$ 时，因 $\delta\leqslant 2(\delta-1)^r$，故 $(\delta-2)(\delta-1)^r\leqslant\delta[(\delta-1)^r-1]$. 于是由命题 (IV) 得 $(\delta-1)^r\leqslant\frac{\delta[(\delta-1)^r-1]}{\delta-2}=\delta[1+(\delta-1)+\cdots+(\delta-1)^{r-1}]\leqslant p-1$ 即知断言成立．

根据此断言和引理6，我们有 $e_g(p)\leqslant e_g(p-1)+1+\sqrt[r]{p-1}$ 故

$$e_g(p)=\sum_{k=1}^{p-1}[e_g(k+1)-e_g(k)]\leqslant\sum_{k=1}^{p-1}(1+k^{\frac{1}{r}})<p+\sum_{k=1}^{p-1}k^{\frac{1}{r}}$$

因

$$\frac{1^{\frac{1}{r}}+2^{\frac{1}{r}}+\cdots+(p-1)^{\frac{1}{r}}}{p^{1+\frac{1}{r}}}=\frac{1}{p}\left[\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{r}}+\cdots+\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

$$<\int_0^1 x^{\frac{1}{r}}dx=\frac{1}{1+\frac{1}{r}}x^{1+\frac{1}{r}}\Bigg|_0^1=\frac{r}{r+1}$$

故 $e_g(p)<p+\sum_{k=1}^{p-1}k^{\frac{1}{r}}<p+\frac{r}{r+1}p^{1+\frac{1}{r}}$,定理证完.

最后，我们给出两个颇有意义的猜想.

猜想 1　设 δ_g 为围长不小于 g 的具有 $e_g(p)$ 条边的 p 阶图之最小度数，则当 $p\to\infty$ 时 $\delta_g\to\infty$.

猜想 2　所有围长不小于 5 的 p 阶图点独立数之下确界为 $[(p+2)/3]$.

参考文献

1 孙智宏，一类Turan型问题，南京大学学报数学半年刊，8(1991)，No.1，87–98

2 徐利治、王兴华，数学分析的方法及例题选讲，高等教育出版社，1983，pp129–137

3 I.Reiman，Uberein Problem von K.Zarankiewicz，Acta Math. Acad. Sci. Hunger. 9(1958)，269–278

4 C.T.Benson，Minimal regular graghs of girths eight and twelve，Canad.J.Math.18(1966),1091–1094

5 J.A.Bondy and M.Simonovits，Cycles of even length in graghs，J.Combin. Theory Ser.B16(1974)，no.2，97–105

ON MACIMUM SIZES OF GRAPHS WITH GIRTHS NOTLESS THAN A GIVER NUMBER

Sun Zhihong

(Huaiyin Teacher,s College)

(下转 148 页)